با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی نهم
فصل هشتم

عنوان فصل: حجم و مساحت

از صفحه‌ی ۱۳۱ تا صفحه‌ی ۱۴۳ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل حجم و مساحت آمده است.

مباحث فصل: حجم و مساحت کره، حجم هرم و مخروط، سطح و حجم

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۱۳۱ · فعالیت — تعریف کره و نمونه‌های کروی ۴

۲ صفحه ۱۳۲ · فعالیت — حجم کره ۴

۳ صفحه ۱۳۲ · کار در کلاس — حجم کره و استوانه ۵

۴ صفحه ۱۳۳ · فعالیت — مساحت رویه‌ی کره ۵

۵ صفحه ۱۳۳ · کار در کلاس — مساحت نیم‌کره ۶

۶ صفحه ۱۳۴ · تمرین — کره‌ی زمین، استوانک و پیمانه ... ۶

۷ صفحه ۱۳۵ · فعالیت — آشنایی با هرم ۷

۸ صفحه ۱۳۶ · فعالیت — هرم منتظم و مقایسه‌ی حجم هرم‌ها ... ۷

۹ صفحه ۱۳۷ · کار در کلاس — هرم‌های هم‌حجم ۸

۱۰ صفحه ۱۳۷ · فعالیت — محاسبه‌ی حجم هرم (تجزیه‌ی منشور) ... ۸

۱۱ صفحه ۱۳۷ · کار در کلاس — حجم هرم ۹

۱۲ صفحه ۱۳۸ · فعالیت — هرم منتظم و مخروط ۹

۱۳ صفحه ۱۳۹ · کار در کلاس — حجم مخروط ۱۰

۱۴ صفحه ۱۳۹ · تمرین — حجم هرم و مخروط ۱۰

۱۵ صفحه ۱۴۰ · فعالیت — گسترده‌ی هرم و مخروط ۱۱

۱۶ صفحه ۱۴۱ · فعالیت — دوران و حجم حاصل ۱۲

۱۷ صفحه ۱۴۱ · کار در کلاس — مساحت کل هرم منتظم ۱۲

۱۸ صفحه ۱۴۲ · کار در کلاس — دوران ربع دایره ۱۲

۱۹ صفحه ۱۴۲ · فعالیت — نماها و برش کره ۱۲

۲۰ صفحه ۱۴۳ · تمرین — نسبت حجم به سطح و جعبه‌ی کره‌ها ... ۱۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۱۳۱ فعالیت

۱ــ به تعریف دایره به‌عنوان یک شکل هندسی مسطح توجه کنید: دایره، مجموعه نقاطی از صفحه است که همه‌ی آن نقطه‌ها از یک نقطه‌ی ثابت در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله‌ی ثابت و مشخص هستند. به این اندازه‌ی ثابت شعاع دایره می‌گوییم. با توجه به این تعریف، کره را به‌عنوان یک شکل هندسی فضایی تعریف کنید: «کره مجموعه _____ از فضا است که _____ مرکز _____ هستند. به این اندازه _____ می‌گوییم.»

۲ــ کره‌ی زمین و توپ بسکتبال نمونه‌هایی از حجم‌های کروی است. چند نمونه‌ی دیگر از حجم‌های کروی را نام ببرید.

کره مجموعه‌ی **نقاطی** از فضا است که همه‌ی آنها از یک نقطه‌ی ثابت به نام **مرکز** به یک **فاصله‌ی ثابت** هستند. به این اندازه **شعاع** کره می‌گوییم.

نمونه‌های دیگر: توپ فوتبال، توپ تنیس، پرتقال، گوی شیشه‌ای، حباب صابون، ماه و خورشید (تقریباً)، مروارید.

۲ صفحه ۱۳۲ فعالیت

مانند شکل، کره‌ای را در استوانه‌ای قرار می‌دهیم که کره در آن محاط شود (از اطراف، بالا و پایین بر آن مماس باشد). اگر شعاع کره R باشد، ارتفاع استوانه و شعاع قاعده‌ی آن را بر حسب R نشان دهید و حجم استوانه را بنویسید. سپس توپ را به دو نیم‌کره‌ی مساوی ببرید؛ یکی را داخل استوانه بگذارید و نیم‌کره‌ی دیگر را از آب پر و در استوانه خالی کنید؛ با دو نیم‌کره، فضای باقی‌مانده پر از آب می‌شود. الف) حجم استوانه چند برابر حجم نیم‌کره است؟ ب) حجم استوانه چند برابر حجم کره است؟ ج) بنابراین حجم کره _____ برابر حجم استوانه است. د) با توجه به دستور محاسبه‌ی حجم استوانه، دستور محاسبه‌ی حجم کره‌ی به شعاع R را به دست آورید.

ارتفاع استوانه ۲R و شعاع قاعده‌ی آن R است؛ حجم استوانه: $V = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$.

- الف) فضای باقی‌مانده با دو نیم‌کره‌ی آب (یعنی یک کره) پر می‌شود؛ با یک نیم‌کره‌ی داخل استوانه، حجم استوانه سه نیم‌کره است؛ پس حجم استوانه ۳ برابر حجم نیم‌کره است.
- ب) حجم کره ۲ نیم‌کره است؛ پس حجم استوانه $\frac{3}{2}$ (یک‌ونیم) برابر حجم کره است.
- ج) حجم کره $\frac{2}{3}$ برابر حجم استوانه است.
- د) $V = \frac{2}{3} \times 2\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳ صفحه ۱۳۲ کار در کلاس

۱ــ کره‌ای در استوانه‌ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است. الف) حجم کره را به دست آورید. ب) حجم استوانه را به دست آورید. ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲ــ حجم نیم‌کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را به دست آورید.

۱

قطر کره ۱۰ است؛ پس R=۵.

- الف) $V = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500}{3}\pi \approx 523.6$ سانتی‌متر مکعب
- ب) $V = \pi(5)^2 \times 10 = 250\pi \approx 785.4$ سانتی‌متر مکعب
- ج) $250\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{250}{3}\pi \approx 261.8$ سانتی‌متر مکعب

۲

$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(10)^3 = \frac{2000}{3}\pi \approx 2094.4$ سانتی‌متر مکعب.

۴ صفحه ۱۳۳ فعالیت

نیم‌کره را روی کاغذ بگذارید و دو بار روی کاغذ دایره رسم کنید طوری که نیم‌کره بتواند روی این دایره‌ها قرار گیرد؛ این دو دایره‌ی کاغذی را برش بزنید و روی سطح نیم‌کره بچسبانید. آیا توانستید تمام سطح (رویه) نیم‌کره را با این دو دایره بپوشانید؟ درباره‌ی مشکلات این کار و تقریبی بودن آن گفت‌وگو کنید. ثابت می‌شود که مساحت رویه‌ی یک نیم‌کره به شعاع R، دو برابر مساحت دایره‌ای است که نیم‌کره روی آن ایستاده است (قاعده‌ی نیم‌کره). الف) پس مساحت رویه‌ی نیم‌کره برابر است با: ____ ب) در نتیجه مساحت کره به شعاع R برابر است با: ____

تقریباً می‌توان رویه را با دو دایره پوشاند (چون مساحت رویه‌ی نیم‌کره دو برابر مساحت قاعده است)؛ ولی چون سطح کروی خمیده است، کاغذ صاف روی آن چین می‌خورد و باید برش بزنیم؛ بنابراین کار دقیق نیست و فقط تقریبی است. با خرد کردن کاغذها به قطعه‌های کوچک‌تر دقت زیاد می‌شود.

- الف) $2 \times \pi R^2 = 2\pi R^2$
- ب) $2 \times 2\pi R^2 = 4\pi R^2$

مساحت یک کره به شعاع R برابر است با $S = 4\pi R^2$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۵ صفحه ۱۳۳ کار در کلاس

۱ــ مساحت یک کلاه (عرقچین) به شکل رویه‌ی نیم‌کره به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را پیدا کنید.

۲ــ می‌خواهیم یک نیم‌کره‌ی چوبی توپر به شعاع ۱۰ سانتی‌متر را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ‌شده را پیدا کنید. بین محاسبه‌ی مساحت کل نیم‌کره‌ی چوبی توپر و مساحت رویه‌ی یک عرقچین چه تفاوتی هست؟

۱) $2\pi R^2 = 2\pi(10)^2 = 200\pi \approx 628$ سانتی‌متر مربع.

۲) علاوه بر رویه‌ی خمیده، قاعده‌ی دایره‌ای نیم‌کره هم رنگ می‌شود:

$2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2 = 300\pi \approx 942$ سانتی‌متر مربع.

تفاوت: عرقچین فقط رویه‌ی خمیده (200π) دارد ولی نیم‌کره‌ی توپر قاعده‌ی دایره‌ای هم دارد ($+100\pi$).

۶ صفحه ۱۳۴ تمرین

۱ــ قطر تقریبی کره‌ی زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است. الف) قطر و شعاع کره‌ی زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید. ب) مساحت تقریبی رویه‌ی (سطح) کره‌ی زمین را بر حسب کیلومتر مربع با نماد علمی بنویسید. ج) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱,۶۴۸,۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره‌ی زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

۲ــ یک استوانک (کپسول) گاز از قرار گرفتن یک نیم‌کره روی یک استوانه به‌صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره‌ی قاعده‌ی استوانک ۶۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن (قسمت استوانه‌ای) یک متر باشد، حجم استوانک را بر حسب متر مکعب به دست آورید. اگر بخواهیم سطح کل این استوانک را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است، به شرط اینکه رنگ‌آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد؟

۳ــ پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره و به قطر دهانه‌ی ۲۴ سانتی‌متر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

۱

- الف) قطر: 1.28×10^4 km ؛ شعاع: 6.4×10^3 km.
- ب) $S = 4\pi R^2 = 4(3.14)(6.4 \times 10^3)^2 \approx 5.14 \times 10^8$ کیلومتر مربع.
- ج) $\frac{1.648 \times 10^6}{5.14 \times 10^8} \approx 3.2 \times 10^{-3}$ ؛ حدود ۰/۳۲ درصد (تقریباً $\frac{1}{312}$).

۲

شعاع $r = 0.3$ متر؛ حجم استوانه $\pi(0.3)^2(1) = 0.09\pi$ و حجم نیم‌کره $\frac{2}{3}\pi(0.3)^3 = 0.018\pi$ ؛ جمع: $0.108\pi \approx 0.339$ متر مکعب.

سطح کل = سطح جانبی استوانه + قاعده‌ی پایین + رویه‌ی نیم‌کره: $2\pi(0.3)(1) + \pi(0.3)^2 + 2\pi(0.3)^2 = 0.6\pi + 0.09\pi + 0.18\pi = 0.87\pi \approx 2.73$ متر مربع؛ رنگ لازم: $2.73 \times 100 \approx 273$ گرم (حدود ۰/۲۷ کیلوگرم).

۳

شعاع ۱۲؛ حجم آب (نیم‌کره): $\frac{2}{3}\pi(12)^3 = 1152\pi$ ؛ در لیوان استوانه‌ای با همان شعاع: $\pi(12)^2 h = 1152\pi \Rightarrow h = 8$ سانتی‌متر.

در قسمت ۲ فرض شده است قاعده‌ی پایین استوانک هم رنگ می‌شود. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷ صفحه ۱۳۵ **فعالیت**

در هرم نشان‌داده‌شده (هرم OABCDE با ارتفاع OH): نام رأس، تعداد وجه‌ها، شکل وجه‌ها، شکل قاعده و نام قاعده را بنویسید. یک نمونه‌ی دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید.

- نام رأس: O
- تعداد وجه‌ها: ۶ (۵ وجه جانبی + ۱ قاعده)
- شکل وجه‌ها: وجه‌های جانبی مثلث‌اند
- شکل قاعده: پنج‌ضلعی
- نام قاعده: ABCDE (چندضلعی ABCDE)

نمونه‌ی دیگر: سقف برخی ساختمان‌ها، چادر مخروطی-هرمی، هرم لوور در پاریس، مناره‌ها و گلدسته‌های هرمی‌شکل.

شکل هرم دیده نشد (از متن همان هرم OABCDE در نظر گرفته شد). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸ صفحه ۱۳۶ **فعالیت**

۱ــ در هرم منتظم مقابل، نام رأس، ارتفاع، شکل قاعده، شکل وجه‌های جانبی و تعداد وجه‌ها را بنویسید.

۲ــ الف) با توجه به شکل‌ها (۱ و ۲: مثلث‌های قاعده هم‌نهشت، ارتفاع $OH < O'H'$؛ ۳ و ۴: ارتفاع‌ها برابر و $S(ABC) < S(A'B'C')$) به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ ب) به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ ج) برای محاسبه‌ی مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می‌کردید؟ برای محاسبه‌ی حجم

هرم چه حدسی می‌زنید؟ د) اگر دو هرم دارای قاعده‌هایی با مساحت مساوی و ارتفاع‌های مساوی باشند، درباره‌ی حجم‌های آنها چه می‌توانید بگویید؟

۱

- نام رأس: O ؛ ارتفاع: OH ؛ شکل قاعده: مربع (ABCD) ؛ وجه‌های جانبی: مثلث‌های هم‌نهشت (متساوی‌الساقین) ؛ تعداد وجه‌ها: ۵.

شکل هرم دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲

- الف) در شکل‌های (۱) و (۲): قاعده‌ها هم‌نهشت‌اند و ارتفاع هرم دوم بیشتر است؛ پس $V' > V$. در شکل‌های (۳) و (۴): ارتفاع‌ها برابرند و قاعده‌ی هرم دوم بزرگ‌تر است؛ پس باز هم $V' > V$.
- ب) حجم هرم به مساحت قاعده و ارتفاع هرم بستگی دارد.
- ج) مساحت مثلث از (قاعده × ارتفاع) تقسیم بر ۲ به دست می‌آید؛ حدس می‌زنیم حجم هرم با (مساحت قاعده × ارتفاع) متناسب است: $V = \frac{1}{3}Sh$.
- د) حجم‌های آنها با هم برابر است.

۹ صفحه ۱۳۷ **کار در کلاس**

در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب‌مستطیل و M و N دو نقطه‌ی دلخواه روی وجه مقابل ($A'B'C'D'$) است. چرا هرم‌های MABCD و NABCD دارای حجم‌های یکسان است؟ به این ترتیب چند هرم می‌توان ساخت که با هرم‌های بالا حجم یکسان داشته باشند؟

هر دو هرم قاعده‌ی مشترک ABCD دارند و ارتفاع هر دو برابر فاصله‌ی دو وجه موازی مکعب‌مستطیل است؛ چون قاعده‌ها هم‌مساحت و ارتفاع‌ها برابرند، حجم آنها یکسان است. هر نقطه‌ی دیگر روی وجه $A'B'C'D$ را هم می‌توان رأس گرفت؛ پس بی‌شمار هرم هم‌حجم می‌توان ساخت.

۱۰ صفحه ۱۳۷ **فعالیت**

در شکل، منشوری با دو قاعده‌ی ABC و DEF را می‌بینید. نقطه‌ی C را به نقطه‌های E و D و نقطه‌ی B را به نقطه‌ی D وصل می‌کنیم؛ منشور به سه هرم تجزیه می‌شود. با پاسخ دادن به سؤال‌های زیر نشان دهید که این سه هرم حجم‌های برابر دارد و نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها یک سوم حجم منشور است. ۱ــ چهارضلعی ABED چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم‌مساحت‌اند؟ ۲ــ چرا هرم‌های

CBED و CBAD دارای حجم‌های برابرند؟ ۳ــ چرا مثلث‌های DEF و ABC هم‌مساحت‌اند؟ ۴ــ چرا هرم‌های CDEF و DABC دارای حجم‌های برابرند؟ ۵ــ با توجه به پاسخ سؤال‌های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

- ۱) وجه جانبی منشور است و متوازی‌الاضلاع (در منشور قائم مستطیل) است؛ قطر BD آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند؛ پس $S_{ABD} = S_{BDE}$.
- ۲) دو هرم رأس مشترک C دارند، قاعده‌های BED و BAD هم‌مساحت‌اند (سؤال ۱) و ارتفاعشان (فاصله‌ی C تا صفحه‌ی ABED) یکی است؛ پس حجم‌ها برابرند.
- ۳) دو قاعده‌ی منشور با هم هم‌نهشت‌اند؛ پس مساحت‌هایشان برابر است.
- ۴) هرم‌های CDEF و DABC قاعده‌های هم‌مساحت (DEF و ABC) و ارتفاع برابر (فاصله‌ی دو قاعده‌ی منشور) دارند؛ پس حجم‌هایشان برابر است.
- ۵) هر سه هرم حجم برابر دارند و مجموع حجم‌هایشان حجم منشور است؛ پس حجم هر هرم یک‌سوم حجم منشور است: $V = \frac{1}{3}Sh$ (S مساحت قاعده و h ارتفاع).

۱۱ صفحه ۱۳۷ **کار در کلاس**

در هرم OABC، AC = ۶ سانتی‌متر، BC = ۱۰ سانتی‌متر و زاویه‌ی ACB برابر ۹۰° است. ارتفاع هرم OH مساوی ۵ سانتی‌متر است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به دست آورید.

مساحت قاعده: $S = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{6 \times 10}{2} = 30\ cm^2$

حجم: $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 30 \times 5 = 50$ سانتی‌متر مکعب.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir
توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۱۳۸ **فعالیت**

۱ــ در شکل، هرم منتظم با قاعده‌ی مربع رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ سانتی‌متر و M وسط BC است. الف) پاره‌خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ ب) مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ ج) اگر طول ضلع قاعده ۱۲ سانتی‌متر باشد، به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OBM طول OM را حساب کنید. د) مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH چقدر است؟ هـ) به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OMH طول OH را به دست آورید. و) حجم هرم OABCD را به دست آورید.

۲ــ هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده‌ی آن یک چندضلعی منتظم باشد. حال تعداد ضلع‌های این چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چندضلعی فوق به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟

- الف) OM در مثلث متساوی‌الساقین OBC هم میانه، هم ارتفاع و هم نیمساز است؛ پس بر BC عمود است.
- ب) مثلث OBM قائم‌الزاویه است (زاویه‌ی M قائمه).
- ج) $BM = 6,\ OB = 10 \Rightarrow OM = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ سانتی‌متر.
- د) مثلث OMH قائم‌الزاویه است (زاویه‌ی H قائمه)؛ H مرکز مربع و M وسط ضلع است؛ پس $MH = \frac{12}{2} = 6$ سانتی‌متر.
- هـ) $OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5.29$ سانتی‌متر.
- و) $V = \frac{1}{3} \times 12^2 \times 2\sqrt{7} = 96\sqrt{7} \approx 254$ سانتی‌متر مکعب.

۲) با زیاد شدن تعداد ضلع‌ها، چندضلعی منتظم به دایره و هرم به مخروط نزدیک می‌شود. مخروط شکلی شبیه هرم منتظم است که قاعده‌ی آن دایره و پای ارتفاع مرکز دایره است؛ حجم مخروط مانند هرم $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ است.

۱۳ صفحه ۱۳۹ **کار در کلاس**

علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، مخروطی به قطر قاعده‌ی ۱۲ سانتی‌متر ساخته است. حجم این مخروط را به دست آورید.

شعاع قاعده $R = 6$ و مولد مخروط (شعاع دایره) ۱۰ است؛ ارتفاع: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. حجم: $V = \frac{1}{3}\pi(6)^2(8) = 96\pi \approx 301.6$ سانتی‌متر مکعب.

۱۴ صفحه ۱۳۹ **تمرین**

۱ــ حجم هرمی را به دست آورید که قاعده‌ی آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر باشد.

۲ــ حجم هرمی با قاعده‌ی مربع را به دست آورید که ضلع قاعده‌ی آن ۴ سانتی‌متر باشد و وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸ سانتی‌متر باشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳ــ ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه‌ی ۴ سانتی‌متر و به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده‌ی آن ۶ سانتی‌متر است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

۱

$V = \frac{1}{3}(6 \times 5)(10) = 100$ سانتی‌متر مکعب.

۲

نصف قطر مربع: $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ؛ ارتفاع هرم: $h = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{64 - 8} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \approx 7.48$ ؛ حجم: $V = \frac{1}{3}(16)(2\sqrt{14}) = \frac{32\sqrt{14}}{3} \approx 39.9$ سانتی‌متر مکعب.

۳

حجم آب: $\frac{1}{3}\pi(4)^2(12) = 64\pi$ ؛ در لیوان: $\pi(6)^2h = 64\pi \Rightarrow h = \frac{64}{36} = \frac{16}{9} \approx 1.78$ سانتی‌متر.

۱۵ صفحه ۱۴۰ **فعالیت**

۳ــ با $\frac{3}{4}$ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر یک سطح مخروطی‌شکل درست کرده‌ایم؛ طول کمان AB چقدر است؟ چه رابطه‌ای بین طول کمان AB و محیط دایره‌ی قاعده‌ی مخروط وجود دارد؟ شعاع قاعده‌ی مخروط را پیدا کنید.

۱ــ با توجه به اندازه‌های ابعاد مکعب و مکعب‌مستطیل، اندازه‌ی ضلع‌ها را در گسترده‌ی هر کدام مشخص کنید. ۲ــ مساحت گسترده‌ی هر یک از هرم‌ها را با توجه به اندازه‌های روی هر هرم محاسبه کنید.

۳

طول کمان: $\frac{3}{4} \times 2\pi(10) = 15\pi \approx 47.1$ سانتی‌متر. این کمان همان محیط دایره‌ی قاعده‌ی مخروط است: $2\pi r = 15\pi \Rightarrow r = 7.5$ سانتی‌متر.

۱ و ۲

در گسترده‌ی مکعب‌مستطیل ۶ مستطیل (دو به دو هم‌نهشت) و در گسترده‌ی هرم یک قاعده و چند مثلث جانبی هست؛ مساحت گسترده = مساحت قاعده + مجموع مساحت وجه‌های جانبی (هر مثلث $\frac{1}{2}$ × قاعده × ارتفاع وجه).

شکل‌ها و اندازه‌های قسمت‌های ۱ و ۲ دیده نشد و فقط روش حل نوشته شد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ صفحه ۱۴۱ فعالیت

۱ــ با دوران دادن یک مستطیل (ابعاد ۳ و ۱۰ سانتی‌متر) حول ضلع آن چه حجمی به دست می‌آید؟ شعاع قاعده‌ی شکل حاصل و ارتفاع آن را بنویسید و حجم را پیدا کنید.

۲ــ اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول ضلع مشخص‌شده در شکل دوران دهیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ حجم آن را پیدا کنید.

۱) استوانه؛ اگر حول ضلع ۱۰ بچرخد: شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۱۰ : $V = \pi(3)^2(10) = 90\pi \approx 282.7$ سانتی‌متر مکعب.

۲) مخروط؛ حجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ که r ضلع قائم دیگر (شعاع) و h ضلع محور دوران است؛ مثلاً برای r=۱۰ و h=۲۰: $\frac{2000}{3}\pi \approx 2094$.

اندازه‌ها و شکل‌ها دیده نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷ صفحه ۱۴۱ کار در کلاس

۱ــ مساحت کل هرم منتظم مقابل را به دست آورید. طول همه‌ی یال‌های آن a است.

اگر قاعده‌ی هرم مربع باشد: قاعده a^2 و چهار وجه جانبی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a با مساحت $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ؛ جمع: $a^2 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = (1+\sqrt{3})a^2$.

شکل هرم دیده نشد (قاعده‌ی مربع فرض شد). این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸ صفحه ۱۴۲ کار در کلاس

حجم حاصل از دوران یک ربع دایره به شعاع ۵ سانتی‌متر را حول شعاع آن پیدا کنید.

دوران ربع دایره حول یکی از شعاع‌هایش یک نیم‌کره می‌سازد: $V = \frac{2}{3}\pi(5)^3 = \frac{250}{3}\pi \approx 261.8$ سانتی‌متر مکعب.

۱۹ صفحه ۱۴۲ فعالیت

۲ــ اگر هر کدام از هرم‌های منتظم زیر را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می‌شود؟ الف) هرم منتظم با قاعده‌ی مثلث ب) با قاعده‌ی مربع ج) با قاعده‌ی شش‌ضلعی

۳ــ کره‌ی مقابل با یک صفحه بریده شده است. سطح بریده‌شده چه شکلی دارد؟ در چه صورت این شکل بیشترین مساحت را دارد؟

۲

- الف) مثلث متساوی‌الاضلاع که سه پاره‌خط از رأس‌های آن به مرکزش وصل شده است (تصویر یال‌های جانبی).
- ب) مربعی که دو قطر آن رسم شده است.
- ج) شش‌ضلعی منتظمی که شش پاره‌خط از رأس‌های آن به مرکزش وصل شده است.

۳

سطح بریده‌شده یک دایره است؛ وقتی صفحه از مرکز کره بگذرد، دایره بیشترین مساحت را دارد (دایره‌ی عظیمه به شعاع R و مساحت πR^2).

پرسش‌های ۱ (رسم نماها) و ۴ (شکل کره) به شکل وابسته بود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰ صفحه ۱۴۳ تمرین

۱ــ حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و با هم مقایسه کنید: مکعب به ضلع a ؛ استوانه به ارتفاع a و شعاع قاعده‌ی a ؛ استوانه به ارتفاع a و قطر قاعده‌ی a ؛ کره به شعاع a. در هر مورد، نسبت حجم به سطح $\left(\frac{V}{S}\right)$ را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

۲ــ از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع‌شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقی‌مانده یک جعبه‌ی مکعب‌مستطیل‌شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای باید بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره‌ی مجاورش و به دیواره‌ی جعبه مماس باشد؟

شکل	V حجم	S سطح کل	V ÷ S
مکعب به ضلع a	a^3	$6a^2$	$\frac{a}{6}$
استوانه (r=a, h=a)	πa^3	$2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$	$\frac{a}{4}$
استوانه (قطر a, h=a)	$\frac{\pi a^3}{4}$	$\frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2 = \frac{3\pi a^2}{2}$	$\frac{a}{6}$
کره به شعاع a	$\frac{4}{3}\pi a^3$	$4\pi a^2$	$\frac{a}{3}$

نسبت $\frac{V}{S}$ در کره بزرگ‌تر است ($\frac{a}{3}$).

۲

قاعده‌ی جعبه مربعی به ضلع $a - 2x$ است. چهار کره‌ی مماس (دو در دو) هر ضلع قاعده را با دو قطر پر می‌کنند: $a - 2x = 4x \Rightarrow a = 6x$.

شکل‌های پرسش ۱ دیده نشد (از روی متن فهرست شد) و پرسش «اسفنج مکعبی» (کار در کلاس) به شکل وابسته بود و حل نشد. این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir